

臨時休校・課題3 (解答)

①

(1) $a_n = 5 \cdot (-4)^{n-1}$

(2) $a_n = 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

(3)
$$S_6 = \frac{2 \{1 - (-3)^6\}}{1 - (-3)}$$
$$= \frac{2(1 - 729)}{4}$$
$$= \frac{1}{2} \times (-728)$$
$$= -364$$

②

(1) $ar = -6 \dots \textcircled{1}$

$ar^4 = 48 \dots \textcircled{2}$

② ÷ ① より

$r^3 = -8$

$r = -2$

よって $a = 3$ とし一般項は

$a_n = 3 \cdot (-2)^{n-1}$

(したがって $a_7 = 3 \cdot (-2)^7 = -384$)

(2)
$$S_7 = \frac{3 \{1 - (\frac{1}{2})^7\}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{6 \{1 - (\frac{1}{2})^7\}}{2 - 1}$$
$$= 6 \times \frac{127}{128} = \frac{381}{64}$$

(3)

$S_3 = 35$ より $\frac{a(r^3 - 1)}{r - 1} = 35 \dots \textcircled{1}$

また $S_6 = 315$ より $\frac{a(r^6 - 1)}{r - 1} = 315 \dots \textcircled{2}$

② ÷ ① より

$$\frac{a(r^3 - 1)(r^3 + 1)}{r - 1} = 315$$

$r^3 + 1 = 9$

$r^3 = 8$

$\rightarrow r = 2$

よって ① より

$\frac{a(8 - 1)}{2 - 1} = 35$ より $a = 5$

(したがって 初項 5 公比 2)

(4)

$ar^4 = 48, ar^7 = 384$ より $r^3 = 8$

$r = 2$ とおす。

これより $a = 4$

$\therefore S_n = \frac{4(2^n - 1)}{2 - 1} = 4(2^n - 1)$

$S_n > 1000$ より

$4(2^n - 1) > 1000$

$2^n - 1 > 250$

$2^n > 251$

これをみたす最小の n は $n = 9$

- ⑥ 選んだ1人が感染している確率をA
1人の人が陽性と判定される確率をBとする。

$$99\% \rightarrow \frac{99}{100} = P_A(B) = P_{\bar{A}}(\bar{B})$$

$$0.5\% \rightarrow \frac{5}{1000} = P(A)$$

- (1) 求める事象は $P(A \cap B)$

$$P(A \cap B) = P(A) P_A(B) = \frac{5}{1000} \times \frac{99}{100} = \frac{99}{20000}$$

$$(2) P(\bar{A} \cap B) = P(\bar{A}) P_{\bar{A}}(B) = \frac{995}{1000} \times \frac{1}{100} = \frac{199}{20000}$$

- (3) 陽性と判定されたとき、感染している。

$$P_B(A) = \frac{P(B \cap A)}{P(B)}$$

$$P(B) = P(A) P_A(B) + P(\bar{A}) P_{\bar{A}}(B) \quad , \quad P(B \cap \bar{A}) = P(\bar{A}) P_{\bar{A}}(B)$$

陽性と判定される確率は

陽性の人か陽性 + 陰性の人か陽性

したがって

$$P_B(A) = \frac{P(A) P_A(B)}{P(A) P_A(B) + P(\bar{A}) P_{\bar{A}}(B)}$$

← これは「ベイズの定理」という。

$$= \frac{\frac{995}{1000} \times \frac{1}{100}}{\frac{5}{1000} \times \frac{99}{100} + \frac{995}{1000} \times \frac{1}{100}}$$

$$= \frac{995}{5 \times 99 + 995} = \frac{199}{99 + 199} = \frac{199}{298} \quad (\approx 0.66)$$

↓

$$(4) P_{\bar{B}}(A) = \frac{P(A) P_A(\bar{B})}{P(A) P_A(\bar{B}) + P(\bar{A}) P_{\bar{A}}(\bar{B})}$$

$$= \frac{\frac{5}{1000} \times \frac{1}{100}}{\frac{5}{1000} \times \frac{1}{100} + \frac{995}{1000} \times \frac{99}{100}}$$

$$= \frac{5}{5 + 995 \times 99}$$

$$= \frac{1}{1 + 99 \times 99} = \frac{1}{19702} \quad (\approx 0.00005)$$

このことから 99% 正確な検査としても
陽性と診断されたとき、66% しか
実際には感染していないことになり得る。
今、話題のPCRも1回やって陽性と
言われてもそんなにショックを受けなくても
大丈夫と言えるのかな？
つまり2回検査しないとダメですね。

④

(1)

$$S_p = \frac{p}{\varepsilon} \text{ ㊤}$$

$$\frac{1}{2} p \{ 2a + (p-1)d \} = \frac{p}{\varepsilon}$$

$$\frac{1}{2} \{ a + (p-1)d \} = \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\varepsilon \{ a + (p-1)d \} = 2$$

$$2a\varepsilon + (p-1)\varepsilon d = 2 \dots \textcircled{1}$$

$$S_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{p} \text{ ㊤}$$

$$\frac{1}{2} \varepsilon \{ 2a + (\varepsilon-1)d \} = \frac{\varepsilon}{p}$$

$$a + (\varepsilon-1)p d = 2 \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \times p - \textcircled{2} \times \varepsilon \text{ ㊤}$$

$$2ap\varepsilon + p\varepsilon(p-1)d = 2p$$

$$-) 2a p \varepsilon + p \varepsilon (\varepsilon - 1) d = 2 \varepsilon$$

$$p\varepsilon(p-\varepsilon)d = 2(p-\varepsilon)$$

$$p-\varepsilon \neq 0 \text{ ㊤}$$

$$d = \frac{2}{p\varepsilon}$$

また ㊤から

$$2a\varepsilon + (p-1)\varepsilon \cdot \frac{2}{p\varepsilon} = 2$$

$$2a\varepsilon + \frac{2}{p}(p-1) = 2$$

$$2a\varepsilon + 2 - \frac{2}{p} = 2$$

$$2a = \frac{2}{p\varepsilon} \Leftrightarrow a = \frac{1}{p\varepsilon}$$

$$\text{㊤から } \underline{\text{初項 } a = \frac{1}{p\varepsilon} \text{ 公差 } \frac{2}{p\varepsilon}}$$

(2)

$$b_m = \frac{1}{\frac{1}{2} \cdot 2^m (a_1 + a_m)}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{2} \cdot 2^m \left\{ \frac{1}{p\varepsilon} + \frac{1}{p\varepsilon} + (2^m - 1) \cdot \frac{2}{p\varepsilon} \right\}}$$

$$\text{分母} = \frac{1}{2} \cdot 2^m \left\{ \frac{2}{p\varepsilon} + \frac{2}{p\varepsilon} (2^m - 1) \right\}$$

$$= 2^m \left(\frac{1}{p\varepsilon} + \frac{1}{p\varepsilon} 2^m - \frac{1}{p\varepsilon} \right)$$

$$= \frac{1}{p\varepsilon} \cdot 4^m$$

$$\therefore b_m = \frac{1}{\frac{1}{p\varepsilon} \cdot 4^m} = p\varepsilon \cdot \left(\frac{1}{4} \right)^m$$

 b_m の初項から n 番目までの和

$$b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n$$

$$= p\varepsilon \cdot \left(\frac{1}{4} \right) + p\varepsilon \cdot \left(\frac{1}{4} \right)^2 + p\varepsilon \cdot \left(\frac{1}{4} \right)^3 + \dots + p\varepsilon \cdot \left(\frac{1}{4} \right)^n$$

$$= p\varepsilon \cdot \frac{\frac{1}{4} \{ 1 - (\frac{1}{4})^n \}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{p\varepsilon}{3} \{ 1 - (\frac{1}{4})^n \}$$

(3) (2) ㊤

$$b_1 = \frac{1}{4} p\varepsilon \Leftrightarrow p\varepsilon = 36 \cdot 4$$

(1) ㊤

$$a_n = \frac{1}{p\varepsilon} + (n-1) \cdot \frac{2}{p\varepsilon} = \frac{1}{p\varepsilon} (1 + 2n - 2)$$

$$= \frac{1}{p\varepsilon} (2n - 1)$$

$$a_{p+\varepsilon} = \frac{17}{48} \text{ であるから}$$

$$\frac{1}{p\varepsilon} \{ 2(p+\varepsilon) - 1 \} = \frac{17}{48}$$

$$2(p+\varepsilon) - 1 = \frac{17}{48} p\varepsilon$$

$$2(p+\varepsilon) = \frac{17}{48} \times 36 \cdot 4 + 1$$

$$2(p+\varepsilon) = 17 \cdot 3 + 1$$

$$p + \varepsilon = 26$$

$$p + \varepsilon = 26 \quad p\varepsilon = 36 \cdot 4$$

よめたい p, ε 12

$$t^2 - 26t + 36 \cdot 4 = 0$$

の2次方程式の解

$$(t-18)(t-8) = 0$$

$$t = 18, 8$$

$$p \neq \varepsilon \text{ ㊤ } p = 18, \varepsilon = 8$$